数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 91-99

On maximal local subgroups of finite simple groups

室蘭工業大学　千吉良直紀 (Naoki Chigira)
Muroran Institute of Technology

1 Introduction

有限単純群の極大局所部分群 (maximal local subgroup) のうち偶数位数のもの、とりわけ極大局所 2 部分群については多くの研究がなされている。ここで有限群 G の位数を割る素数の部分集合 π に対して G の部分群 H が局所 π 部分群 (π-local subgroup) であるとは G のある π 部分群 K があって $H=N_G(K)$ であるときをいう。一方奇数位数の極大局所部分群については Feit-Thompson の定理 [FT] や鈴木通夫氏による素数グラフに関連したある素数の集合 π に関する極大局所 π 部分群の構造についての研究 [Su] などがある。この中で奇数位数の極大局所部分群はうまく統制されその構造まで決定されている。

ここでは単純群の奇数位数の極大局所部分群の取り扱いの様子を見ていくことにする。また単純群の奇数位数の極大部分群について最近得られた結果を紹介する。ここでは単純群といったら非可換有限単純群を意味することにする。

2 Odd Order Theorem

まずは Feit-Thompson の定理の証明について復習しておく。

Theorem 2.1 ([FT]). 奇数位数の群は可解群である。

G を Feit-Thompson の定理の最小位数の反例、すなわち G を奇数位数の非可解な単純群のうち最小位数のものとする。M を G の極大部分群とする。M は G のとり方から可解群である。したがって M は極大局所部分群である。このとき M の構造を完全に決定してそこから矛盾を導くというのが証明の大筋である。実際に M の構造は

(i) M は Frobenius 群である, あるいは

(ii) ある素数 p, q があって $M\simeq FVAut(F)$, $F=GF(p^q)$(加法群とみて位数 p^q の基本可換群), $V\subseteq F^\times$ (F の乗法群) となり、このとき $M^*\simeq F^*V^*Aut(F^*)$, $F^*=GF(q^p)$(加法群とみて位数 q^p の基本可換群), $V^*\subseteq F^{*\times}$ (F^* の乗法群) という極大部分群 M^* で $M\cap M^*\simeq Z_{pq}$ となるものが存在する。

のいずれかの場合になることが示される。すべてが (i) すなわちすべての極大部分群が Frobenius 群である場合には矛盾が起こり、また (ii) のような極大部分群の組があらわれる場合にもやはり矛盾が起こることを示して証明が完了する。最近出版された [BG] および [Pe] では新しい方法も用いられて簡略化され、より整理された形で Feit-Thompson の定理の証明が丁寧に書かれている。

M の構造を決める上ではじめに必要となるのが次の定理である。ここで群 K に対して $r(K)$ で K の基本可換部分群のランクの最大値をあらわす。

Theorem 2.2 (The Uniqueness Theorem [BG, Theorem 9.6]). G を Theorem 2.1 の最小位数の反例とする。G の部分群 K は $r(K) \geq 3$ であるか、あるいは $r(K) = 2$ かつ $r(C_G(K)) \geq 3$ とする。このとき K を含む G の極大部分群は唯一つである。

これを使って M にある Hall 正規部分群が存在することをいう。その正規部分群の M における補群が正規部分群にどのように作用するかを丁寧に調べる。その過程で極大部分群間の関係を調べたり [BG]、指標の理論を用いたり [Pe] する。

3 Suzuki's Theorem

有限群 G の素数グラフ $\Gamma(G)$ とは頂点集合を G の位数を割る素数の集合とし素数 p, q を G に位数 pq の元が存在するときに辺で結ぶことにより出来るグラフである。$\Gamma(G)$ はいくつかの連結成分に分かれる。連結成分を Δ_i と書くことにし特に偶数位数の群の場合には素数 2 の入っている連結成分を Δ_1 と書くことにする。鈴木氏の定理は次のとおりである。

Theorem 3.1 ([Su]). G を $\Gamma(G)$ が非連結な単純群とする。このとき $i \geq 2$ に対して Δ_i は完全グラフである。

群 G の部分群 H が isolated であるとはすべての $h \in H \setminus \{1\}$ に対して

$$C_G(h) \subseteq H$$

が成り立つときをいう。鈴木氏の定理は次の Williams の定理がもとになっている。

Theorem 3.2 ([Wi]). G を $\Gamma(G)$ が連結でない非可解群とする。このとき $i \geq 2$ に対して isolated な冪零 Hall Δ_i 部分群が存在する。

Williams の定理には有限単純群の分類定理が用いられている。さらに分類定理を用いると isolated な冪零 Hall Δ_i 部分群は実際には可換群になることもわかる [CIY]。鈴木氏は単純群の場合に分類定理を使わずに Williams の定理を証明することを試みた。実際次のことを示している。

Theorem 3.3 ([Su]). G を $\Gamma(G)$ が非連結な単純群とする。$i \geq 2$ とする。

1) G の局所 Δ_i 部分群で偶数位数のものが存在するとする。このとき G は isolated な可換 Hall Δ_i 部分群を持つ。

2) G のどの局所 Δ_i 部分群も奇数位数であるとする（以下この条件を $(\star)$ であらわす)。M を G の極大局所 Δ_i 部分群とする。このとき

   (i) M は Frobenius 群である, あるいは

   (ii) ある素数 p, q があって $M \simeq FVAut(F)$, $F = GF(p^q)$(加法群とみて位数 p^q の基本可換群), $V \subseteq F^{\times}$ (F の乗法群) となり、このとき $M^* \simeq F^*V^*Aut(F^*)$, $F^* = GF(q^p)$(加法群とみて位数 q^p の基本可換群), $V^* \subseteq F^{*\times}$ (F^* の乗法群) という極大局所 Δ_i 部分群 M^* で $M \cap M^* \simeq Z_{pq}$ となるものが存在する。さらに $M \cap M^*$ は G で self-normalizing である。

3) 2) の仮定 $(\star)$ のもとですべての極大局所 Δ_i 部分群が Frobenius 群であるとする。このとき G は isolated な冪零 Hall Δ_i 部分群を持つ。

4) 2) の仮定 $(\star)$ のもとで (ii) にある M と M^* の組が存在するとする。このとき $\Delta_i = \{p, q\}$ である。

Theorem 3.3 の 1) はやさしい。そこで 2) の $(\star)$ を仮定し、極大局所 Δ_i 部分群の構造を調べる。ここで鈴木氏は Feit-Thompson の定理の証明を応用する。実際には [BG] にある"local analysis" と [FT] にある"character theory" を用いて Theorem 3.3 を示している。鈴木氏はその証明を [BG]、[FT] と定理番号までパラレルに進行させ [FT] の証明の議論が実際には存在しない単純群（奇数位数の単純群）上の理論ではなく実際に存在する単純群でも用いることが出来ると述べている。

[BG] に対応する部分に比べ [FT] の"character theory" に対応する部分は少々複雑である。この"character theory" の部分は [Pe] を用いることによってすっきりと書き換えることが出来る [Ch2]。[Ch1] と重複してしまうが要点を幾つか述べておく。

以下 G は $(\star)$ を満たすと仮定する。まずは前半の部分の local analysis においてはじめに必要となるのが次の定理である。ここで群 K と素数 p に対して $r_p(K)$ で K の基本可換 p 部分群のランクの最大値をあらわす。

Theorem 3.4 (The Uniqueness Theorem [Su, Theorem 3.6]). 単純群 G は $(\star)$ を満たすとする。G の部分群 K はある $p \in \Delta_i$ に対して $r_p(K) \geq 3$ であるか、あるいは $r(K) = 2$ かつ $r_p(C_G(K)) \geq 3$ とする。このとき K を含む G の極大局所 Δ_i 部分群は唯一つである。

Theorem 3.4 によりランクの大きい群が"統制"されてしまうことがわかる。この定理をもとに M の構造が調べられていく。

$$\sigma(M) = \{p \in \pi(M) | N_G(P) \subseteq M \text{ for } P \in Syl_p(M)\},$$
$$\sigma_0(M) = \sigma(M) \cap \Delta_i$$

とおき M_σ を M の Hall $\sigma(M)$ 部分群、M_{σ_0} を M の Hall $\sigma_0(M)$ 部分群、M_F を M の最大な冪零正規 Hall 部分群とする。

Proposition 3.5. 上の記号のもとで

(i) M_σ, M_{σ_0} は M の正規部分群である。

(ii) $1 \neq M_F \subseteq M_{\sigma_0} \subseteq M_\sigma \subseteq M' \subseteq M$ である。

(iii) $r(M/M_\sigma) \leq 2$ である。

E を M_σ の M での補群とする。ある $p \in \pi(E)$ に対して $r_p(E) = 2$ であれば E の位数 p の部分群 X で $C_{M_{\sigma_0}}(X) \neq 1$ となるものが必ず存在する。$r_p(E) = 1$ のときには $C_{M_{\sigma_0}}(X) \neq 1$ となる位数 p の部分群 $X \subseteq E$ が存在する場合としない場合がある。そこで

$$\kappa(M) = \{p \in \pi(E) | r_p(E) = 1, C_{M_{\sigma_0}}(X) \neq 1 \text{ for some } X \subset E \text{ with } |X| = p\}$$

とおき $\kappa(M) \neq \emptyset$ のとき（ここでは case $\mathcal{P}$ と呼ぶ）と $\kappa(M) = \emptyset$ のとき（ここでは case $\mathcal{F}$ と呼ぶ）とに分ける。“local analysis” の部分で次のことがわかる。

Proposition 3.6. M は case $\mathcal{P}$ を満たすとする。このとき

(i) K は M' の M における補群である。

K により正規化される M_F の M' における補群 V をとる。

(ii) $V \neq 1$ ならば VK は Frobenius 群で K は素数位数である。

$K^* = C_{M_\sigma}(K)$ とおく。

(iii) K^* を含む G の極大局所 Δ_i 部分群 M^* で K^* が M^* の Hall $\kappa(M^*)$ 部分群になるものが存在する。

(iv) $M \cap M^* = K \times K^*$ であり、この部分群は巡回群で self-normalizing である。

(v) case $\mathcal{P}$ を満たす極大局所 Δ_i 部分群は G において M と共役であるかあるいは M^* と共役である。

さらに具体的に M の構造を決めるために次を考える。

$$A_0(M) = \{a \in M | C_{M_{\sigma_0}}(a) \neq 1\} \setminus \{k^m | k \in K \setminus \{1\}, m \in M\}$$

とおく。

Lemma 3.7. $x \in A_0(M)^\sharp = A_0(M) \setminus \{1\}$ に対して $\{M^g | g \in G, x \in M^g\}$ 上に sharply transitive に作用する $C_G(x)$ の正規部分群 $R(x)$ が存在する。

$A_0(M)^\sharp$ の外側で値0をとるような M の類関数全体の集合を $CF(M, A_0(M)^\sharp)$ と書くことにする。$\alpha \in CF(M, A_0(M)^\sharp)$ に対して

$$\alpha^{\tau_M}(g) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in A_0(M)^\sharp,\ g \text{ は } xR(x) \text{ の元と } G \text{ で共役} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって τ_M は $CF(M, A_0(M)^\sharp)$ から G の類関数全体の集合 $CF(G)$ への写像となる。

Lemma 3.8. τ_M は次の性質を持つ。

(i) $\alpha, \beta \in CF(M, A_0(M)^\sharp)$ に対して $(\alpha, \beta)_M = (\alpha^{\tau_M}, \beta^{\tau_M})_G$ が成り立つ。すなわち、内積の値を保つ。

(ii) $\chi \in \mathbb{Z}[Irr(M)] \cap CF(M, A_0(M)^\sharp)$ に対して $\chi^{\tau_M} \in \mathbb{Z}[Irr(G)]$ が成り立つ。すなわち、一般指標を一般指標へ移す。

τ_M は Dade isometry と呼ばれている。Dade isometry を用いるのが [Pe] の方法の特徴である。Dade isometry に関する事柄は [Pe] の前半に一般論としてまとめて述べられている。

$\mathbb{Z}[Irr(M), A_0(M)^\sharp] = \mathbb{Z}[Irr(M)] \cap CF(M, A_0(M)^\sharp)$ の部分集合で複素共役で閉じている集合 $\mathcal{S}$ に対して $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ から $\mathbb{Z}[Irr(G)]$ へのある isometry $\tilde{\tau}$ で $\mathbb{Z}[\mathcal{S}, A_0(M)^\sharp]$ に制限すると Dade isometry τ_M に等しいものがあるとき $(\mathcal{S}, A_0(M)^\sharp, \tau_M)$ は coherent であるという。様々な"$\mathcal{S}$" で coherent であるかどうかを調べそれにより M の構造を調べていくというのが主な手段である。

Lemma 3.9. M は case $\mathcal{P}$ を満たし $\pi(M) = \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ であるとする。$\mathcal{S}_{M'}^{M} = \{\theta^M | \theta \in Irr(M'), \theta \neq 1_{M'}\}$ とおく。このとき $(\mathcal{S}_{M'}^{M}, A_0(M)^\sharp, \tau_M)$ は coherent でない。

M が case $\mathcal{P}$ を満たし $V = 1$ であるとすると Lemma 3.9 の仮定を満たす。このとき M' が位数 p^3 の非可換群となることが示せる。M'/M'' の既約指標から出発して実際に τ_M を拡張した isometry が作れてしまい Lemma 3.9 に矛盾する。したがって

Proposition 3.10. M は case $\mathcal{P}$ を満たし $\pi(M) = \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ であるとする。このとき $V \neq 1$ である。

これより M が case $\mathcal{P}$ を満たすときいつでも $V \neq 1$ となり、Proposition 3.6 より K は素数位数になる。$|K| = q$ とおくことにする。

Lemma 3.11. M は case $\mathcal{P}$ を満たすとする。このとき M_F に含まれる M の正規部分群 H_0 で、ある素数 p に対して M_F/H_0 が位数 p^q の基本可換群で M の主組成因子になるものが存在する。

$\overline{M}_F = M_F/H_0$ とおく。$\overline{M}_F$ への Frobenius 群 VK の作用を考える。Clifford の定理から $\overline{M}_F = \overline{H}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{H}_k$ となる K で共役な既約 $GF(p)[V]$ 加群 $\overline{H}_i$ たちがあることがわかる。次元を考えることなどから次のことがわかる。

Proposition 3.12. 次のいずれかが成り立つ。

(a) $\overline{M}_F = \overline{H}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{H}_q$, $\dim(\overline{H}_i) = 1$ $(1 \leq i \leq q)$, あるいは

(b) $\overline{M}_F$ は既約 $GF(p)[V]$ 加群である。

さらに (b) の場合には $\overline{M}_F V/C_V(\overline{M}_F)K \simeq FV Aut(F)$ となる。ここで $F = GF(p^q)$, $V \subseteq F^\times$ である。

Proposition 3.12 のように分けるのが [Su] と大きく異なる点で [Pe] の方法 ([Ch2]) の特徴である。これにより [Su] のいくつかの部分の証明が簡略化される。例えば $\pi(M) \neq \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ のときには Frobenius 群 VK の $\overline{M}_F$ への作用を、そして $\pi(M) \neq \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ のときには上の (a), (b) のそれぞれの場合について $\overline{M}_F$ からのある種の bilinear form を考察することにより $H_0 = 1$ であることが導かれる。すなわち

Proposition 3.13. M は case $\mathfrak{P}$ を満たすとする。このとき M_F は位数 p^q の基本可換群である。

Proposition 3.6 と Proposition 3.10 から M が case $\mathfrak{P}$ を満たせば $K^* = C_{M_\sigma}(K)$ も素数位数であることがわかる。$|K^*| = p$ とおくと $K \times K^*$ が G で self-normalizing な位数 pq の巡回群となる。$W = K \times K^*$, $\widehat{W} = W \setminus (K \cup K^*)$ とおく。このとき次の性質を満たす linear isometry $\sigma_G : CF(W) \longrightarrow CF(G)$ が存在する。

(i) W の一般指標を G の一般指標へ移す。

(ii) $1_W^{\sigma_G} = 1_G$ が成り立つ。

(iii) $\alpha \in CF(W, \widehat{W})$ に対して $\alpha^{\sigma_G} = \alpha^G$ (α^G は G への誘導) が成り立つ。

(iv) $\alpha \in CF(W)$, $x \in \widehat{W}$ に対して $\alpha^{\sigma_G}(x) = \alpha(x)$ が成り立つ。

(v) $\phi \in Irr(G) \setminus (Irr(G) \cap CF(W)^{\sigma_G})$, $x \in \widehat{W}$ に対して $\phi(x) = 0$ が成り立つ。

これが case $\mathfrak{P}$ を満たす M を調べる上で重要な役割を果たす。M は case $\mathfrak{P}$ を満たし $\pi(M) = \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ であるとする。$\zeta(1) = q$ となる $\zeta \in \mathfrak{S}_{M'}^M \cap Irr(M)$ をとる。このとき $(1_{M'}^M - \zeta)^{\tau_M} - \sum_{\omega \in Irr(K)} \omega^{\sigma_G}$ と $Irr(W)^{\sigma_G}$ との直交性を調べると次のことがわかる。

Proposition 3.14. M は case $\mathfrak{P}$ を満たし $\pi(M) = \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ であるとする。このとき $p < q$ である。

さらに $\mathfrak{S}_{M',M_F}^M(C_V(M_F)) = \{\xi \in \mathfrak{S}_{M'}^M | M_F \not\subseteq Ker\xi, C_V(M_F) \subseteq Ker\xi\}$ とする。

Lemma 3.15. M は case $\mathfrak{P}$ を満たし $\pi(M) = \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ であるとする。このとき $(\mathfrak{S}_{M',M_F}^M(C_V(M_F)), A_0(M)^\sharp, \tau_M)$ は coherent である。

これらのことを用いて次のことがわかる。

Proposition 3.16. M は case $\mathcal{P}$ を満たし $\pi(M) = \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ であるとする。このとき V は巡回群である。

さらに Propsition 3.12 の (a), (b) それぞれの場合の指標を詳しく調べることや p と q の関係と M と M^* の関係、M, M^* の素数グラフの連結性などを調べることにより次のことが示される。

Proposition 3.17. M は case $\mathcal{P}$ を満たすとする。このとき

(i) $C_V(M_F) = 1$ が成り立つ。

(ii) $\pi(M) \neq \sigma_0(M) \cup \kappa(M)$ である。

(iii) Proposition 3.12 (b) を満たす。

(iv) $\Delta_i = \{p, q\}$ である。

また、M が case $\mathcal{F}$ を満たすときには $r(M/M_F) = 1$ を示せば M は Frobenius 群となる。ある素数 p に対して $r_p(M/M_F) = 2$ であると仮定し、M の Sylow p 部分群を含む極大局所 Δ_i 部分群 L をとる。この L の構造を決めるときにも Proposition 3.12 が有効でありこれにより [Su] の議論が簡略化される。L は Frobenius 群になり L の指標に関する coherent などを用いて矛盾が導かれる。

Remark . 分類定理を用いると実際には case $\mathcal{P}$ は起こらないことがわかる。これを分類定理を用いずに示すことが今後の課題である。

Remark. 分類定理を用いると Theorem 3.3 3) の"冪零 Hall Δ_i 部分群"は"可換 Hall Δ_i 部分群"のはずである。これも分類定理を使わずに示すことが出来るであろうか。Frobenius 群 M の核である M_F が可換群であることを示せばよい。

4 Maximal subgroups of odd order

単純群の極大部分群で奇数位数のものを考えることにする。奇数位数の極大部分群は可解群であるから極大局所部分群である。まず次の定理が知られている。

Theorem 4.1 (Thompson[Go, Theorem 10.3.2]). 有限群 G が極大部分群として奇数位数の冪零群を持つとする。このとき G は可解群である。

この定理から単純群に奇数位数の極大部分群が存在すればそれは冪零群でない可解群であることがわかる。実際の単純群で奇数位数の極大部分群を持つ場合を調べてみる。

Example 4.2. 群 G の極大部分群を M とする。いくつかの例を挙げる（すべてではない）。

- $G = L_2(q)$ $(q \equiv -1 \pmod 4)$, $M \simeq q : (q-1)/2$.

- $G = L_p(q)$, $M \simeq (q^p-1)/d(q-1):p$, ここで$p$は奇素数、$d=(q-1,p)$. 但し$L_3(4)$は除く。
- $G = U_3(q)$, $M \simeq (q^2-q+1)/d:3$, ここで$d=(q+1,3)$. 但し$U_3(3)$, $U_3(5)$は除く。
- $G = M_{23}$, $M \simeq 23:11$.
- $G = Th$, $M \simeq 31:15$.

ここに挙げた例の場合、奇数位数の極大部分群はいずれもFrobenius群である。一般の単純群においても奇数位数の極大部分群が存在すればそれは単に冪例でない可解群というよりはかなり制限された構造を持つであろうと考えられる。Feit-Thompsonの定理では奇数位数の単純群（実際には存在しないが）の奇数位数の極大部分群の構造を調べた。それはFrobenius群に"近い"群であった。一般に単純群の奇数位数の極大部分群の構造を分類定理を用いずに決めることが出来るであろうか？

この問題に対して次のような結果を得た。

Theorem 4.3. Gを単純群としMをGの極大部分群とする。Mの位数を割るすべての素数pに対して$r_p(G)=1$であるとする。このときMはFrobenius群である。

Remark. Theorem 4.3の仮定はかなり強いが、例えばExample 4.2の中で$L_2(p)$ ($p \equiv -1$ (mod 4), pは素数)やM_{23}はこの条件を満たしている。

$L_2(q)$ ($q \equiv -1 \pmod 4$)の時には$q=p^n$であれば$r_p(M)=n$である。よってランクはいくらでも大きくなりうる。ランクが大きい場合を統制するような"Uniqueness Theorem"のようなものがあるであろうか？また極大部分群の構造を決めていく上で[FT],[Su],[Pe]にあるような指標の理論が応用できるであろうか。奇数位数の極大部分群の構造についてTheorem 4.3にある条件を取り除いた一般の場合の考察は今後の課題である。また、Theorem 3.3で本質的にはGが偶数位数である必要はない。Theorem 4.3の証明でもGが偶数位数であることは必要ない。奇数位数の極大部分群を調べることとGが偶数位数であることとの関連、すなわちOdd Order Theoremとの関連についても今後の研究課題である。

参考文献

[Ch1] N. Chigira, Prime graphs and odd order subgroups of simple groups, 第４５回代数学シンポジウム報告集, 2000.

[Ch2] N. Chigira, On the prime graph of a finite simple group – an application of the method of Suzuki-Peterfalvi, preprint.

[CIY] N. Chigira, N. Iiyori and H. Yamaki, Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order, Invent. Math., **139** (2000), 525–539.

[BG] H. Bender and G. Glauberman, "Local Analysis for the Odd Order Theorem", London Math. Soc. Lecture Note Series **188**, Cambridge University Press 1994.

[FT] W. Feit and J. Thompson, Solvability of the groups of odd order, Pacific J. Math. **13**, (1963) 775–1029.

[Go] D. Gorenstein. "Finite Groups", Chelsea, New York, 1980.

[Pe] T. Peterfalvi, "Character Theory for the Odd Order Theorem", London Math. Soc. Lecture Note Series **272**, Cambridge University Press 2000.

[Su] M. Suzuki, On the prime graph of finite simple group an application of the method of Feit-Thompson-Bender-Glauberman, "Groups and Combinatorics – in memory of Michio Suzuki", Adv. Study in Pure Math. **32** (2001) 41–207.

[Wi] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups, J. Algebra **69** (1981) 487–513.